

# NP-kompletnost

Andrej Ivašković

13. decembar 2016.

## §1. LOGIČKE FORMULE

- Podsetimo se: za problem kažemo da je **NP**-kompletan ukoliko je u **NP** i ako je **NP**-težak.
- Svi **NP**-kompletni problemi su međusobno ekvivalentni (u kontekstu redukcija izračunljivih u polinomskom vremenu)
- Da bi se dokazalo da je neki problem **NP**-kompletan, dovoljno je pokazati:
  - da je u **NP**, odnosno da postoji "verifikacija" u polinomskom vremenu
  - da je **NP**-težak, odnosno da postoji redukcija iz svakog problema u **NP**; međutim, redukcije se mogu "spojiti" (kompozicija funkcija,  $\circ$ ), tako da je dovoljno naći redukciju iz nekog **NP**-kompletnog problema
- Neophodan nam je **NP**-kompletan problem od kog ćemo poći sa ovim redukcijama.
- **SAT**. Za datu formulu  $F$  iskazne logike, odrediti da li postoji neka dodela vrednosti logičkim promenljivama tako da je ona tačna ( $\top$ ).
- Pojmovi:
  - **iskazno slovo**: logička promenljiva  $p$
  - **literal**:  $l$  je ili logička promenljiva  $p$  ili njena negacija  $\neg p$
  - **klauzula**: disjunkcija nekih literala,  $l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_m$
  - **model**: dodela vrednosti iskaznim slovima neke formule  $F$  takva da u tom slučaju  $F$  ima vrednost  $\top$
- **KUKOVA TEOREMA**. Problem SAT je **NP**-kompletan.
- *Ričard Karp* objavljuje 1972. godine rad u kom dokazuje **NP**-kompletnost za 21 problem, polazeći od rezultata Kukove teoreme.

- Deo Karpove hijerarhije:
  
- Logička formula je u **konjunktivnoj normalnoj formi** ukoliko je ona konjunkcija nekih klauzula. Svaka logička formula ima ekvivalentnu konjunktivnu normalnu formu (i ova transformacija može da se učini u polinomskom vremenu).
- **3-SAT**. Za formulu oblika  $(l_{11} \vee l_{12} \vee l_{13}) \wedge \dots \wedge (l_{n1} \vee l_{n2} \vee l_{n3})$  odlučiti da li postoji model.
- 3-SAT je **NP**-kompletan.
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- Za **NP**-kompletne probleme postoji veliki broj heuristika koje su u vezi sa nekim temama u veštačkoj inteligenciji i automatskom rezonovanju.

## §2. GRAFOVI

- Sada posmatramo nekoliko **NP**-kompletnih problema iz teorije grafova (da bismo se demoralisali, budući da su postavke jednostavne, a za efikasno rešenje ne znamo).
- **IND**. Za dat neusmeren graf  $G = (V, E)$  i prirodan broj  $k$  odlučiti da li postoji nezavisan skup  $U \subseteq V$  kardinalnosti  $k$ , gde  $U$  nazivamo nezavisnim ako ne postoji grana u  $E$  koja povezuje neka dva čvora u  $U$ .
- Šta ukoliko unapred znamo da je  $k = 10$ ?
- Problem IND je **NP**-kompletan.
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- **CLIQUE**. Za dat neusmeren graf  $G = (V, E)$  i prirodan broj  $k$  odlučiti da li  $G$  sadrži  $k$ -kliku, odnosno podgraf od  $k$  čvorova takav da su svi direktno povezani u  $G$ .

- Problem CLIQUE je NP-kompletan.
  
- **3-COL.** Za dat neusmeren graf  $G = (V, E)$  odlučiti da li je  $G$   $k$ -bojiv, odnosno da li postoji neka dodela boja iz  $\{r, g, b\}$  svim čvorovima u  $G$  takva da nikoja dva povezana čvora nisu obojena istom bojom. I ovo je NP-kompletan problem.
- **HAM.** Za dat neusmeren graf  $G = (V, E)$  odlučiti da li  $G$  sadrži Hamiltonov ciklus, odnosno da li postoji ciklus koji posećuje svaki čvor u  $V$  tačno jednom. I ovo je NP-kompletan problem.
- **TSP (PROBLEM PUTUJUĆEG TRGOVCA).** Za dat neusmeren težinski graf  $G = (V, E, w)$  i neki broj  $t$  odlučiti da li  $G$  sadrži Hamiltonov ciklus takav da je zbir težina grana u tom ciklusu manji od ili jednak  $t$ .
- Problem TSP je NP-kompletan.

### §3. SKUPOVI

- **3-DM.** Za data tri disjunktne skupa  $X, Y, Z$  i neki skup uređenih trojki  $M \subseteq X \times Y \times Z$ , odlučiti da li postoji  $M' \subseteq M$  takvo da se svaki element  $X, Y$  i  $Z$  nalazi u tačno jednoj trojci u  $M'$ . Ovaj problem je NP-kompletan.
- **3-ExCov.** Za skup  $U$  sa  $3n$  elemenata, familiju  $S = \{S_1, \dots, S_m\}$  troelementnih podskupova  $U$ , postoji li  $T \subseteq S$  od tačno  $n$  skupova takva da im je unija  $U$ ?
- 3-ExCov je NP-kompletan.
  
- **SETCov.** Za skup  $U$ , familiju  $S = \{S_1, \dots, S_m\}$  podskupova  $U$  i broj  $n$ , odlučiti postoji li odabir  $n$  skupova iz  $S$  takvih da im je unija  $U$ . Ovo je takođe NP-kompletan problem (redukcija iz 3-ExCov).

- **KNAPSACK.** Dato je  $n$  elemenata, gde je svakom pridružena nenegativna celobrojna vrednost  $v_i$  i nenegativna celobrojna težina  $w_i$ . Takođe su dati i brojevi  $W$  i  $V$ . Postoji li odabir nekih elemenata takav da ukupna težina ne prelazi  $W$  i ukupna vrednost je bar  $V$ ?
- KNAPSACK (i sličan SUBSETSUM) je **NP**-kompletan.
  
- KNAPSACK se može dalje relativno lako redukovati na praktične probleme raspoređivanja, izrade rasporeda... i ovo je jedan od najznačajnijih **NP**-kompletnih problema.